

# ORBIFOLDES À PREMIÈRE CLASSE DE CHERN NULLE

FRÉDÉRIC CAMPANA

## 1. INTRODUCTION.

On établit ici une version orbifold de théorème de décomposition de Bogomolov pour les variétés Kähleriennes compactes à première classe de Chern nulle (voir [Bo74], [Bo78], [Y78], [Bea83] et [P97] pour certains cas singuliers). Les orbifolde Kähleriennes considérées sont les V-variétés de Satake, ou encore les variétés à singularités quotient.

La démonstration (voir §2, 3, 4) est une extension orbifold directe du cas lisse, qui repose sur la construction de métriques de Kähler Ricci-plates, le scindage de Cheeger-Gromoll, et le théorème de décomposition de De Rham.

Appliqué au cas des surfaces  $K3$  normales, on en déduit en particulier le fait que le groupe fondamental du lieu lisse d'une telle surface est soit fini, soit extension fini de  $\mathbb{Z}^{\oplus 4}$  par un groupe fini. Cette propriété avait été conjecturée dans [K-Z00]. Voir la bibliographie de cet article, ainsi que [KZ02], [S-Z01], et [C-K-O 03] pour de nombreux cas établis par voie algébro-géométrique.

Notre motivation était de vérifier la conjecture formulée dans [C01] de la presque-abélianité du groupe fondamental et l'annulation de la pseudo-métrique de Kobayashi pour certaines variétés Kähleriennes spéciales de dimension trois. Voir §7 ci-dessous pour plus de détails.

On pourra trouver dans [P97] et [A03] des résultats établissant une telle décomposition dans des situations différentes. ([A] traite par voie algébro-géométrique le cas du morphisme d'Albanese pour une paire log-terminale projective  $(X, B)$ ).

Je voudrais remercier J.P. Demailly pour ses indications sur la preuve du théorème 4.1, ainsi que J. Maubon, qui m'a fourni les références [B93] et [B-Z94] sur la version orbifold du théorème de scindage de Cheeger-Gromoll, qui joue un rôle crucial ici.

## 2. SUMMARY.

We establish an orbifold version of Bogomolov decomposition theorem for compact Kähler manifolds with trivial first Chern class. The orbifolds here considered are Satake's V-manifolds. The proof is a direct orbifold extension of the proof in the smooth case, obtained by using Ricci-flat Kähler metrics, Cheeger-Gromoll splitting theorem, and De Rham decomposition theorem.

Applied to normal  $K3$  surfaces, we thus obtain in particular the fact that the fundamental group of their smooth locus is either finite, or an extension of  $\mathbb{Z}^{\oplus 4}$  by a finite group, in which case the  $K3$  under consideration is uniformised (in the orbifold sense), by a complex torus (of dimension 2). This property was conjectured in [K-Z00, 3.12], and proved in many situations by algebro-geometric methods. We refer to [K-Z02], [S-Z01], and [C-K-O 03] for further details on the known cases.

Our motivation was to check conjectures of almost abelianity and vanishing of the Kobayashi pseudo-metric for certain special threefolds. See §7 for further details.

### 3. ORBIFOLDES PURES.

Nous suivons ici (à la terminologie près) les définitions de [D-K00, §6]. Les notions introduites ici apparaissent dans [S56] auquel nous renvoyons pour plus de détails.

**Définition 3.1.** *Une orbifold pure est un espace analytique complexe normal  $X$  n'ayant que des singularités quotient.*

Pour chaque point  $a \in X$ , on a donc un voisinage  $U$  de  $a$  dans  $X$ , et un isomorphisme  $\phi : U \rightarrow \tilde{U}/G$ , dans lequel  $\tilde{U}$  est un ouvert de  $\mathbb{C}^n$ , et  $G \subset GL(n, \mathbb{C})$  un sous-groupe fini agissant sur  $\tilde{U}$ , avec  $a = \phi(0)$ . On peut choisir  $G$  tel que les points fixes de tout  $g \in G$  ait un ensemble de points fixes de codimension au moins 2. Un tel triplet  $(U, \tilde{U}/G, \phi)$  sera appelé une **uniformisation locale** de  $X$  en  $a$ . Remarquons que, si l'on restreint l'ouvert  $U$ , le groupe  $G$  est alors le groupe fondamental local  $\pi_1^{loc}(a, X)$  de  $X$  en  $a$ , et que l'uniformisation précédente est alors unique à unique isomorphisme près.

On notera  $X^* \subset X$  (resp.  $Sing(X) \subset X$ ) le lieu lisse (resp. singulier) de  $X$ .

Les orbifolds pures sont simplement appelées orbifolds dans [D-K00]. On ajoute ici l'adjectif “pur” pour les distinguer des orbifolds plus générales de [C01], dans lesquelles la structure d'orbifold comporte également un  $\mathbb{Q}$ -diviseur  $\Delta$ .

Les objets  $\Theta$  sur l'orbifold pure  $X$  (tels que le faisceau structural, le faisceau canonique, les métriques de Kähler, la forme de courbure d'une telle métrique) sont les objets usuels sur la partie lisse de  $X$ , avec la condition que, dans toute uniformisation locale  $(U, \tilde{U}/G, \phi)$  de  $X$  en  $a$ , l'objet  $\Theta$  soit sur la partie lisse de  $U$ , l'image par  $\phi$  d'un objet correspondant  $G$ -invariant  $\tilde{\Theta}$  sur  $\tilde{U}$ . Si  $\alpha$  est une forme de degré maximum sur l'ouvert  $U$  d'une uniformisation locale, on définit ainsi:  $\int_U \alpha := (1/Card(G)). \int_{\tilde{U}} \tilde{\alpha}$ .

Par exemple:  $\mathcal{O}_U := p_*(\mathcal{O}_V)$ , et  $K_U^m := p_*(K_V^m)$ ,  $\forall m \in \mathbb{Z}$ . Ce dernier faisceau est donc localement libre si  $m$  est un multiple de  $Card(G)$ . Donc  $K_X^m$  est localement libre si  $X$  est compacte et  $m$  suffisamment divisible.

On peut donc définir la première classe de Chern  $c_1(X) := -(1/m).(c_1(K_X^m))$ , si  $X$  est compacte, et  $m$  comme ci-dessus. Cette classe de Chern peut encore, comme dans le cas lisse, être calculée comme la classe de cohomologie de la forme de courbure de la connexion d'une métrique hermitienne sur le fibré  $K_X^{-m}$ , pour  $m$  suffisamment divisible.

**Exemple 3.2.** *Soit  $X$  une orbifold pure compacte, et de dimension 2. Alors  $Sing(X) \subset X$  est un ensemble fini. Soit  $r : X' \rightarrow X$  une résolution de  $X$ . Si  $X'$  est Kähler, alors  $X$  est Kähler. En effet, la métrique de  $X'$  définit sur  $X^*$  une métrique de Kähler que l'on peut recoller avec une métrique de Kähler locale définie sur une uniformisation locale de chacun des points de  $Sing(X)$ . Soit  $X'$  une surface K3 et  $D$  un diviseur réduit effectif exceptionnel de  $X'$ . Soit  $r : X' \rightarrow X$  la contraction de  $D$  dans  $X'$ . Alors (par [K-M98; 4.20], [B-P-V84; II.7.3, III.2.4], et [D79]),  $X$  est une orbifold pure compacte connexe Kähler de dimension 2 avec fibré canonique trivial (et  $c_1(X) = 0$ ). Réciproquement, si  $X'$  est une orbifold pure singulière compacte connexe et Kähler de dimension 2 à fibré canonique trivial, on déduit de [K-M98, 4.20] à nouveau que  $X'$ , dans la résolution minimale  $r : X' \rightarrow X$ , est une surface K3.*

Si  $X$  est une orbifold pure, munie d'une métrique orbifold de Kähler, on a encore l'égalité  $2.\Delta' = 2.\Delta'' = \Delta$ , pour les Laplaciens (orbifoldes) déduits de cette métrique, ceci par les mêmes arguments (locaux) que dans le cas lisse. En particulier, le lemme du  $\partial\bar{\partial}$  est encore vrai, dans le contexte orbifold. Une  $(1,1)$ -forme  $\alpha$  réelle  $d$ -exacte est donc de la forme:  $\alpha = i.\partial\bar{\partial}f$ , pour  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^\infty$  (au sens orbifold).

#### 4. MÉTRIQUES DE KÄHLER-EINSTEIN.

Lorsque  $X$  est une orbifold compacte avec  $K_X$  ample (ou  $c_1(X) < 0$ ), il est établi dans [K87] que  $X$  admet une métrique de Kähler-Einstein. La démonstration est la même que celle ([Au78]) du cas lisse. Le cas des orbifoldes de Fano ( $K_X^{-1}$  ample, ou  $c_1(X) > 0$ ) est étudié dans [D-K00]. On va ici constater que le cas où  $c_1 = 0$  est, dans le contexte orbifold, exactement similaire à celui du cas lisse. (Curieusement, il nous a été impossible de trouver cette observation dans la littérature).

**Théorème 4.1.** *Soit  $X$  une orbifold pure Kählérienne compacte et connexe avec  $c_1(X) = 0$ . Toute classe de Kähler de  $X$  est représentée par une unique métrique de Kähler Ricci-plate sur  $X$ .*

**Démonstration:** C'est une adaptation immédiate de la démonstration dans le cas lisse, telle qu'elle est exposée, par exemple, dans [Siu 87; pp. 85-113]. Dans une première étape, on se ramène à la résolution de l'équation de Monge-Ampère:  $\det(g_{i\bar{j}} + \phi_{i\bar{j}}) = e^F \cdot \det(g_{i\bar{j}})$ , dans laquelle  $(g_{i\bar{j}})$  est (en coordonnées locales) une métrique de Kähler de la classe donnée d'une forme de Kähler  $\omega$ ,  $\phi : X \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction  $\mathcal{C}^\infty$  inconnue,  $\phi_{i\bar{j}} := i\partial_i\bar{\partial}_j\phi$ , et:  $i\partial\bar{\partial}F = R_{i\bar{j}} = -i\partial_i\bar{\partial}_j\log(\det((g_{l\bar{k}})))$ , puisque la première classe de Chern de  $X$  est nulle. Le lemme du  $\partial\bar{\partial}$  orbifold fournit cette mise en équation.

On applique alors la méthode de continuité, considérant la famille d'équations  $(*)_t$ :

$\det(g_{i\bar{j}} + \phi_{i\bar{j}}) = A_t \cdot e^{t.F} \cdot \det(g_{i\bar{j}})$ ,  $t \in [0, 1]$ ,  $A_t := (\text{vol}_g(M)) \cdot (\int_M e^{t.F})^{-1}$ . Pour  $t = 0$ , on a une solution  $\phi = 0$ , et la métrique  $g$ . Pour  $t = 1$ , on a donc une solution du problème. On considère l'ensemble non vide des  $t$  pour lesquels l'équation  $(*)_t$  a une solution.

Cet ensemble est ouvert, par une application du théorème des fonctions implicites et linéarisation du problème. La démonstration est celle du cas lisse, en regardant les solutions localement dans les ouverts  $\tilde{U}$ . On peut consulter, par exemple, [D-K00, §6.2] pour le cas analogue des orbifoldes de Fano.

La partie la plus délicate est de démontrer que cet ensemble est fermé. Il suffit pour cela d'établir des estimations a priori pour les solutions  $\phi_t$  de  $(*)_t$ , portant sur les normes uniformes de  $\phi_t$ , puis sur celles des dérivées du second ordre, puis sur les normes de Hölder  $C^{2,\alpha}$  de  $\phi_t$ .

Les estimées uniformes sont obtenues dans [Siu87;§2] par la méthode d'itération de Moser. La seule chose à vérifier par rapport au cas lisse est la validité de la formule d'intégration par parties dans le cas orbifold, ce qui est immédiat.

Les estimées suivantes, (basées sur le principe du maximum et une inégalité de Harnack due à Moser) qui sont les plus difficiles (voir [Siu 87, §4 et §5]), résultent d'arguments locaux, et peuvent donc être traitées dans des ouverts uniformisants  $\tilde{U}$ , sans changement.  $\square$

**Corollaire 4.2.** *Soit  $r : X' \rightarrow X$  la contraction d'un diviseur exceptionnel  $D' \subset X'$  d'une surface  $K3$   $X'$ . Alors  $X$  est une orbifolde Kählérienne pure à fibré canonique trivial. Toute classe de Kähler sur  $X$  est représentée par une unique métrique de Kähler Ricci-plate.*

## 5. UNIFORMISATION ORBIFOLDE.

On va considérer ici une orbifolde pure connexe  $X$ , dont on notera  $X^*$  le lieu lisse. On notera  $\pi_1^{orb}(X) := \pi_1(X^*)$  son **groupe fondamental d'orbifolde**. On a une surjection naturelle  $\pi_1^{orb}(X) \rightarrow \pi_1(X)$ , qui n'est en général pas injective (considérer par exemple une surface  $K3$  normale de Kummer  $X$ , quotient d'un tore complexe de dimension 2. Alors  $X$  est simplement connexe, mais son groupe fondamental d'orbifolde est isomorphe à  $\mathbb{Z}^{\oplus 4}$ ).

Nous donnons quelques détails sur ces notions faciles, faute de références accessibles sur ce sujet (les références données dans [B-Z94] renvoient toutes à des thèses, ou publications internes à des universités).

On va établir une relation entre le groupe fondamental d'orbifolde de  $X$  et les revêtements orbifoldes de  $X$ , similaire à celle du cas lisse.

**Définition 5.1.** *Un revêtement d'orbifolde  $r : X' \rightarrow X$  de  $X$  est la donnée d'une orbifolde pure et connexe  $X'$  et d'une application holomorphe  $r$  telle que:*

- (1) *Si  $X'' := r^{-1}(X^*)$ , et si  $r^* : X'' \rightarrow X^*$  est la restriction de  $r$  à  $X''$ , alors  $r^*$  est un revêtement étale de  $X^*$ .*
- (2) *Pour tout  $a \in X$ , muni d'une uniformisation locale  $(U, \tilde{U}/G, \phi)$ , avec  $\tilde{U}$  simplement connexe, et pour toute composante connexe  $U''$  de  $(r^*)^{-1}(U \cap X^*)$ , il existe  $a' \in r^{-1}(a)$ , un sous-groupe  $G' \subset G$ , et une uniformisation locale  $(U', \tilde{U}/G', \phi')$  de  $X'$  en  $a'$ , telle que  $U'' = U' \cap X''$ , et telle que:  $\phi^{-1} \circ r \circ \phi' : \tilde{U}/G' \rightarrow \tilde{U}/G$  soit le quotient naturel induit par l'inclusion de  $G'$  dans  $G$ .*

On définit comme dans le cas lisse la notion d'isomorphisme de revêtements orbifoldes.

Tout comme dans le cas lisse, on a une bijection naturelle entre sous-groupes du groupe fondamental orbifolde et (classes d'isomorphismes de) revêtements orbifoldes. Plus précisément:

**Proposition 5.2.** *Soit  $X$  une orbifolde pure et connexe, et  $b \in X^*$  un point-base lisse de  $X$ . L'application naturelle entre les classes d'isomorphisme de revêtements orbifoldes connexes de  $X$  et les sous-groupes de  $\pi_1^{orb}(X, b) := \pi_1(X^*, b)$ , qui associe à un revêtement orbifolde le sous-groupe défini par sa restriction au-dessus de  $X^*$  (définie par 5.1 (1) ci-dessus) est bijective.*

**Démonstration:** L'injectivité est évidente. La surjectivité provient de ce que l'on peut partiellement compactifier tout revêtement connexe  $r^* : X'' \rightarrow X^*$  de  $X^*$  en un revêtement orbifolde  $r : X' \rightarrow X$  de  $X$ , en utilisant la finitude des groupes fondamentaux locaux  $\pi_1^{loc}(a, X)$ . Plus précisément, si  $a \in \text{Sing}(X)$ , et si  $(U, \tilde{U}/G, \phi)$  est une uniformisation locale de  $X$  en  $a$  telle que  $\tilde{U}$  soit simplement connexe, alors chaque composante connexe de  $(r^*)^{-1}(U^*)$  est isomorphe à  $(\tilde{U}/G') := U'$ , pour un unique sous-groupe  $G' \subset G$  (un point-base de  $U$  ayant été fixé, notant:  $U^* := (X^* \cap U)$ ). On peut alors recoller  $(r^*)^{-1}(U^*)$  et  $\Gamma \times U'$ , grâce aux isomorphismes précédents, si  $\Gamma$  est l'ensemble des composantes connexes de  $(r^*)^{-1}(U^*)$ . Les détails ne présentent aucune difficulté  $\square$

**Définition 5.3.** *Le revêtement  $\bar{r} : \bar{X} \rightarrow X$  qui correspond au sous-groupe trivial  $\{1\}$  de  $\pi_1^{ob}(X)$  dans la bijection précédente est appelé le **revêtement universel orbifold** de  $X$ .*

On remarquera que  $\bar{X}$  est lisse (et fournit donc une uniformisation globale de  $X$ ) si et seulement si, pour chaque  $a \in X$ , le morphisme naturel  $\pi_1^{loc}(a, X) \rightarrow \pi_1^{orb}(X)$  déduit de l'injection de  $U^*$  dans  $X^*$ , est injectif. (Je remercie T. Delzant pour m'avoir signalé ce point).

Remarquons aussi que, si  $X$  est une orbifold compacte munie d'une métrique d'orbifold Riemannienne arbitraire, alors:  $\bar{X}$ , munie de la métrique image réciproque de celle de  $X$  par  $\bar{r}$ , est complète.

De plus, si  $\bar{X}$  est non-compacte, elle contient (au moins) une droite (ie: une géodésique définie sur  $\mathbb{R}$ , minimisant la distance entre deux quelconques de ses points). Voir [B-Z94] pour cette assertion.

Nous allons maintenant fournir la version orbifold du théorème de décomposition Riemannien de De Rham. Ce résultat est utilisé sans démonstration dans [C-P02].

Nous établissons ici l'observation qui permet d'adapter la démonstration du cas lisse. Pour les résultats classiques relatifs aux groupes d'holonomie, nous renvoyons à [Be87; §10], et à sa bibliographie.

**Proposition 5.4.** *Soit  $X$  une orbifold pure munie d'une métrique Riemannienne complète. Soit  $X^*$  sa partie lisse, supposée simplement connexe. Alors  $X$  admet une décomposition en produit Riemannien fini d'orbifolde  $X = \prod_{j \in J} X_j$  tel que:  $X^* = \prod_{j \in J} X_j^*$ , l'action du groupe d'holonomie de chacun des facteurs  $X_j^*$  étant irréductible.*

**Démonstration:** Le groupe d'holonomie de  $X^*$  (relatif à un point fixé  $b \in X^*$ ) est un sous-groupe de Lie du groupe orthogonal approprié. En particulier, il y est fermé. Ce groupe d'holonomie, étant fermé et engendré par les déplacements parallèles le long de “petits lassos” (au sens de Kobayashi-Nomizu) contenus dans  $X^*$ , contient donc (à conjugaison près) le groupe d'holonomie de  $\tilde{U}$ , si  $(U, \tilde{U}/G, \phi)$  est une uniformisation locale de  $X$  en un point arbitraire  $a \in X$  (ceci parce que ce groupe est engendré par les déplacements parallèles le long des “petits lassos” contenus dans  $U$ ).

Or le déplacement parallèle  $T_c$  le long d'un lacet  $c$  de  $U$  se relève en le déplacement parallèle  $T_{c'}$  le long du lacet  $c' := u'' \circ \tilde{c} \circ u'$ , dans lequel  $u''$  (resp.  $u'$ ) est le relèvement à  $\tilde{U}$  de  $u^{-1}$  (resp.  $u$ ) partant de  $0 \in \tilde{U}$  et aboutissant à  $d'$  (resp.  $d''$ ), point initial (resp. final) de  $\tilde{c}$ , où  $u$  est un chemin dans  $U$  qui joint le point  $a$  au point initial  $d$  de  $c$ , et où  $\tilde{c}$  relève  $c$  à  $\tilde{U}$ .

Cette observation montre que la décomposition locale,  $G$ -invariante, en  $0 \in \tilde{U}$  de  $\tilde{U}$  en produit de facteurs irréductibles pour l'holonomie de  $\tilde{U}$  est compatible avec les (ie: fournit des sous-facteurs des) feuilletages définissant les facteurs irréductibles pour l'holonomie de  $X^*$ .

A partir de ce point, la démonstration de la version orbifold du théorème de De Rham utilise la complétion de  $X$  de la même manière que dans le cas lisse  $\square$

## 6. LE THÉORÈME DE SCINDAGE ORBIFOLDE.

Nous avons la version suivante du théorème de scindage de Cheeger-Gromoll. Je remercie vivement J.Maubon qui m'a appris l'existence de cette référence.

**Théorème 6.1.** ([Bo-Z94]) *Soit  $\tilde{X}$  une orbifold Riemannienne complète à courbure de Ricci partout positive ou nulle. Alors:  $\tilde{X} = \tilde{N} \times \mathbb{R}^l$ , où  $N$  est une orbifold Riemannienne complète ne contenant pas de droite. (Le produit précédent est pris au sens Riemannien, la métrique sur  $\mathbb{R}^l$  étant la métrique plate).*

Remarquons que la notion d'orbifold utilisée dans [B-Z94] (et que nous ne définissons pas ici) est plus générale que la notion d'orbifold pure considérée ci-dessus. Ce résultat s'applique donc en particulier aux orbifolds Kählériennes Ricci-plates de la §3 ci-dessus, et fournit donc le:

**Corollaire 6.2.** ([Bo-Z94]) *Soit  $X$  une orbifold Riemannienne compacte à courbure de Ricci partout positive ou nulle. Alors  $X$  a un revêtement d'orbifold fini  $\tilde{X}$  qui est un produit Riemannien  $\tilde{X} = \tilde{N} \times T$ , dans lequel  $\tilde{N}$  est une orbifold simplement connexe (au sens orbifold), et  $T$  est un tore (réel) plat.*

*En particulier,  $\pi_1^{orb}(X) := G$  est extension de  $\mathbb{Z}^{\oplus l}$  par un sous-groupe fini  $F$  de  $G$  (On dira que  $G$  est **presque-abélien de rang  $l$** ).*

La formulation de ce résultat n'est pas donnée dans [B-Z94], mais s'en déduit immédiatement à l'aide du théorème de Bieberbach (un groupe cristallographique a un sous-groupe d'indice fini sans point fixe, donc abélien).

**Corollaire 6.3.** *Soit  $X$  une orbifold Kählérienne compacte et connexe avec  $c_1(X) = 0$ . Alors:*

- (1) *Le groupe fondamental de  $X$  est presque abélien de rang  $2m$ ,  $m \leq \dim(X)$ .*
- (2)  *$X$  admet un revêtement d'orbifold fini  $\tilde{X} = \tilde{N} \times T$ , dans lequel  $\tilde{N}$  est une orbifold Kählérienne compacte et simplement connexe au sens orbifold, et  $T$  est un tore complexe de dimension  $m$ .*

Ce corollaire est un cas particulier du corollaire 6.3 ci-dessous. Mais on peut le déduire plus élémentairement de l'observation initiale de la démonstration de 5.4 ci-dessus, et du théorème de Lichnérowicz ([Li55, p. 264]), qui affirme que les facteurs locaux de la décomposition irréductible d'holonomie d'une variétés Kählérienne sont encore Kählériens (et en particulier complexes).

Le corollaire 6.3 (2) ci-dessus peut être considérablement précisé par 6.4 ci-dessous, dont la démonstration consiste simplement à appliquer les arguments de [Bea83], utilisant la version orbifold 5.4 du théorème de décomposition de De Rham. Voir [P97] pour des résultats de décomposition similaires pour les variétés projectives  $\mathbb{Q}$ -factorielles à singularités terminales.

**Théorème 6.4.** *Soit  $X$  une orbifold Kählérienne compacte et connexe avec  $c_1(X) = 0$ . Alors:  $X$  admet un revêtement d'orbifold fini  $\tilde{X} = \tilde{C} \times \tilde{S} \times T$ , dans lequel  $\tilde{C}$  (resp.  $\tilde{S}$ ) est un produit fini d'orbifolds Kählériennes de **Calabi-Yau** (resp. **Hyperkählériennes**), et  $T$  est un tore complexe de dimension  $m$ . Cette décomposition est unique.*

On définit les notions qui apparaissent dans le résultat précédent:

**Définition 6.5.** *Une orbifold pure  $X$  de dimension complexe  $m$  est dite de **Calabi-Yau** (resp. **Hyperkählérienne**) si elle est compacte, simplement connexe au sens orbifold, et si elle admet une métrique Kählérienne Ricci plate dont la restriction à sa partie lisse est d'holonomie irréductible égale à  $SU(m)$  (resp.  $Sp(m/2)$ ).*

Les arguments de [Bea83], basés sur le théorème de Calabi-Yau, le principe d'holonomie, et la décomposition de De Rham, s'étendent donc au cas orbifold, par ce qui précède, et fournissent:

**Proposition 6.6.** *Soit  $X$  une orbifolde pure et Kählérienne compacte connexe et simplement connexe au sens orbifold. On a équivalence entre les propriétés (1),(2) suivantes:*

- (1)  *$X$  est de Calabi-Yau (resp. Hyperkählérienne).*
- (2)  *$K_X$  est trivial et  $H^0(X, \Omega_X^2) = 0$  (resp.  $H^0(X, \Omega_X^2)$  est engendré par une section partout de rang maximum sur  $X^*$ ).*

Voir aussi [Fu83] pour d'autres résultats et exemples concernant les orbifoldes pures hyperkählériennes, et leurs déformations.

Dans le cas des surfaces, on peut être plus précis:

**Corollaire 6.7.** *Soit  $r : X' \rightarrow X$  la contraction d'un diviseur exceptionnel  $D' \subset X'$ , où  $X'$  est une surface K3. Alors le groupe fondamental d'orbifold de  $X$  est soit fini, soit presque-abélien de rang 4. De plus,  $X$  admet un revêtement d'orbifold fini qui est soit une surface K3 normale et simplement connexe (au sens orbifold) dans le premier cas, soit un tore complexe de dimension 2 dans le second cas.*

**Remarque 6.8.** *Le corollaire précédent résout donc la conjecture (3.12) de [K-Z00] (à l'exception du fait qu'une orbifolde K3 simplement connexe au sens orbifold  $y$  est aussi conjecturée avoir des singularités de Du Val).*

*La motivation de ce résultat provient ici des conjectures concernant les variétés spéciales formulées dans [C01]. Voir §7. ci-dessous.*

*Remarquons aussi qu'il existe des surfaces K3 normales et simplement connexes au sens des orbifoldes, mais non lisses. Par exemple, une surface K3 (lisse) de Kummer dans laquelle on contracte l'une des 16 courbes exceptionnelles.*

*On dira que l'orbifold  $X$  est **bonne** si son revêtement universel d'orbifold est lisse. L'exemple précédent est donc une orbifolde K3 qui n'est pas bonne.*

**Corollaire 6.9.** *Soit  $X'$  une surface K3 lisse, et  $D' \subset X'$  un diviseur exceptionnel de  $X'$ . Alors:*

- (1) *Il existe une modification  $T'$  d'un tore complexe ou d'une surface K3 lisse  $T$  de dimension 2 et une application holomorphe  $r : T' \rightarrow X'$  génériquement finie et finie et non-ramifiée au-dessus de  $X^* := X' - D'$ ,*
- (2) *Si l'orbifold  $X$  obtenue par contraction de  $D'$  dans  $X'$  est bonne et projective, alors  $X'$  contient deux familles à un paramètre de courbes elliptiques (singulières, en général) dont le membre générique est disjoint de  $D'$ .*

**Démonstration:** La première assertion est simplement une reformulation de 6.7. La seconde est obtenue en prenant l'image par  $r$  des familles à un paramètre de courbes elliptiques sur  $T' = T$  (qui est alors une surface K3 lisse) construites dans [Mo-Mu82], et en utilisant le lemme suivant, affirmant que de telles familles de courbes elliptiques n'ont pas de point base.  $\square$

**Lemme 6.10.** *Soit  $X$  une surface K3 lisse, et  $(E_s)_{s \in S}$  une famille à un paramètre de courbes elliptiques de  $X$ . Alors, par chaque point de  $X$ , il ne passe qu'un nombre fini de courbes  $E_s$ .*

**Démonstration:** Soit  $w : Z \rightarrow S$  une surface elliptique obtenue par désingularisation du graphe d'incidence de la famille  $(E_s)_{s \in S}$ . Soit  $h : Z \rightarrow X$  l'application holomorphe obtenue par composition avec la projection sur  $X$  du graphe d'incidence de cette famille. Soit  $v$  un générateur de l'espace vectoriel complexe  $H^0(X, \Omega_X^2)$ , et  $v' := h^*(v)$ . Alors  $v'$  est une section de  $K_Z$ , et son lieu des zéros est donc contenu dans une réunion (finie) de fibres de  $w$ . Si  $a \in X$  était un point base de la famille,  $v'$  s'annulerait sur la multisection  $h^{-1}(a)$  de  $w$ . Contradiction  $\square$

**Question 6.11.** *L'assertion (2) de 6.9 ci-dessus reste-t'elle vraie si  $X$  n'est pas supposée bonne?*

## 7. VARIÉTÉS SPÉCIALES DE DIMENSION TROIS.

La motivation initiale des résultats précédents est la démonstration de cas particuliers en dimension 3 de conjectures formulées dans [C01] concernant les variétés spéciales (voir [C01] pour la définition).

**Conjecture 7.1.** *Soit  $Y$  une variété Kählérienne compacte spéciale. Alors:*

- (1)  $\pi_1(Y)$  est presque abélien (ie: admet un sous-groupe d'indice fini abélien)
- (2) La pseudo-métrique de Kobayashi  $d_Y$  de  $Y$  est identiquement nulle sur  $Y$  (ie:  $d_Y(y, y') = 0, \forall y, y' \in Y$ ).

Lorsque  $Y$  est de dimension 3, la conjecture (1) est démontrée dans [C01], sauf dans le cas où  $\kappa(Y) = 2$ , et où le "cœur"  $c_Y : Y \rightarrow C(Y)$  de  $Y$  est tel que  $\kappa(C(Y)/\Delta(c_Y)) = 0$ . (Voir [C01; §3] pour ces notions et résultats).

Dans cette situation,  $S := C(Y)$  est donc une surface Kählérienne, et  $\Delta(c_X) := D$  un diviseur orbifold tel que  $\kappa(S, K_S + D) = 0$ . En particulier: ou bien  $\kappa(S) = 0$ , ou bien  $S$  est rationnelle (le cas où  $S$  est réglée avec  $q(S) > 0$  est traité dans [C01]). Nous allons traiter ici le cas le plus facile, où  $\kappa(S) = 0$ .

**Théorème 7.2.** *Soit  $f : Y \rightarrow S$  une fibration elliptique d'une variété Kählérienne compacte  $Y$  de dimension 3 sur une surface (lisse)  $S$ . On suppose que  $\kappa(S) = \kappa(S, K_S + D) = 0$ , où  $D := \Delta(f)$  est le diviseur orbifold des fibres multiples de  $f$  (voir [C01]). Alors:*

- (1)  $\pi_1(X)$  est presque abélien.
- (2) Si  $S$  est projective, si  $D$  est un diviseur exceptionnel de  $S$ , si l'orbifold  $S'$  obtenue par contraction de  $D$  dans  $S$  est bonne, et si  $x, y, z \in Y$  étant trois points génériques, on peut trouver deux applications holomorphes  $h_j : \mathbb{C} \rightarrow Y, j = 1, 2$  telles que:  $f(x), f(y) \in (f \circ h_1)(\mathbb{C})$  et:  $f(z), f(y) \in (f \circ h_2)(\mathbb{C})$ .
- (3)  $d_Y \equiv 0$  si  $S$  est projective, et si  $S'$  est bonne.

**Démonstration:** Dans ce cas, après revêtement étale fini,  $S$  est biméromorphe soit à une surface  $K3$ , soit à un tore complexe. Des arguments faciles montrent que  $D$  est exceptionnel, puisque l'on a aussi:  $\kappa(S, K_S + D) = 0$ .

La première assertion résulte alors de 6.7 et du lemme 7.3 ci-dessous. La dernière assertion est une conséquence immédiate de la seconde et de la continuité de  $d_Y$  relativement à la topologie métrique. Pour démontrer la seconde propriété, on considère un modèle lisse du produit fibré  $Y' := Y \times_T$ , si  $T$  est une uniformisation lisse de l'orbifold  $S'$  obtenue en contractant le diviseur



exceptionnel  $D$  de  $S$ . On peut donc supposer (quitte à remplacer  $Y$  par  $Y'$ ) que  $S = T$  est lisse, et est soit une surface  $K3$ , soit une surface abélienne.

Dans le premier cas, on conclut en appliquant [B-L00] aux images réciproques par  $f$  des membres génériques de deux familles de courbes elliptiques de  $S = T$  qui ne rencontrent pas  $D$ , la première (resp. seconde) courbe elliptique contenant  $x$  et  $y$  (resp.  $z$  et  $y$ ). Dans le second cas, on applique [B-L00] au dessus (par  $f$ ) de l'image d'une courbe entière  $h : \mathbb{C} \rightarrow T$  qui évite les points (en nombre fini) qui sont au-dessus des points singuliers de  $S'$ , et passe par  $f(x)$ ,  $f(y)$  et  $f(z)$  (une seule courbe entière suffit, dans ce cas)  $\square$

**Lemme 7.3.** *Soit  $f : Y \rightarrow S$  une fibration holomorphe entre variétés complexes compactes et connexes,  $Y$  Kähler. Si  $F$  est la fibre générique de  $f$ , on suppose que:*

(1)  $\pi_1(F)$  est presque abélien.

(2) Il existe  $S^* \subset S$ , un ouvert de Zariski dense tel que:

(2.a)  $\pi_1(S^*)$  est presque abélien.

(2.b) Pour tout  $s \in S^*$ , la fibre de  $f$  au-dessus de  $s$  est non-multiple (au sens des multiplicités définies par pgcd; voir [C01, §9]).

Alors  $\pi_1(Y)$  est presque nilpotent (ie: a un sous-groupe d'indice fini nilpotent), et presque abélien si  $Y$  est une variété spéciale.

**Démonstration:** Soit  $Y^* := f^{-1}(S^*)$ . Le morphisme de groupes:  $\pi_1(Y^*) \rightarrow \pi_1(Y)$  déduit de l'injection de  $Y^*$  dans  $Y$  est surjectif. Par l'hypothèse (2.b), on a une suite exacte de groupes:

$$1 \rightarrow \pi_1(F) \rightarrow \pi_1(Y^*) \rightarrow \pi_1(S^*) \rightarrow 1,$$

d'où l'on déduit que  $\pi_1(Y^*)$  est presque polycyclique (ie: a un sous-groupe d'indice fini polycyclique). Donc  $\pi_1(Y)$  est presque polycyclique. De [A-N99], ou de [C01], on déduit que  $\pi_1(Y)$  est presque nilpotent.

De [C01], on déduit enfin que  $\pi_1(Y)$  est presque abélien si  $Y$  est spéciale  $\square$

## 8. BIBLIOGRAPHIE

- [A03] F.Ambro. The Moduli B-Divisor of an LC-trivial Fibration. math.AG/0308143.
- [A-N99] D.Arapura-M. Nori. Fundamental Groups of Algebraic Varieties and Kähler Manifolds. Comp. Math. 116 (1999), 173-193.
- [Au78] T.Aubin. Equations de type Monge-Ampère sur les variétés Kählériennes compactes. Bull. Sc. Math. 102 (1978), 63-95.
- [BPV 84] W.Barth-C.Peters-A.Van de Ven. Complex Surfaces. Erg. der Math. 4 Springer Verlag (1984)
- [Bea 83] A.Beuville. Variétés Kählériennes à première classe de Chern nulle. J.Diff.Geom. 18 (1983), 755-782.
- [De87] A.Besse. Einstein Manifolds. Erg. der Math. 10 (1987). Springer Verlag.
- [Bog74] F.Bogomolov. The Decomposition of Kähler Manifolds with Trivial Canonical Class. Math. USSR Sb. 22 (1974), 580-583.
- [Bog74] F.Bogomolov. Hamiltonian Kähler Manifolds. Sov. Math. Dokl. 19 (1978), 1462-1465.
- [Bo93] J. Borzellino. Orbifolds of Maximal Diameter. Indiana Univ. Math. J. 42 (1993), 37-53.

- [Bo-Z] J.Borzellino-S.H.Zhu. The Splitting Theorem for Orbifolds. Ill. J. Math. 38 (1994), 679-691.
- [B-L00] J.Buzzard-S.Lu. Algebraic Surfaces Holomorphically Dominable by  $\mathbb{C}^2$ . Inv. Math. 139 (2000), 617-659.
- [C 01] F.Campana. Special Manifolds and Classification Theory. Alg.geom. 0110051.  
Une introduction est exposée dans: Special Varieties and Classification Theory: An Overview. Acta Applicandae Mathematicae. Kluwer Academic Publishers. 1-21. (2002)
- [C01'] F.Campana. Ensembles de Green-Lazarsfeld et quotients résolubles des groupes de Kähler. J.Alg. Geom. 10 (2001), 599-622.
- [C-P02] F.Campana-T. Peternell. Projective Manifolds with Splitting Tangent Bundle, I. Math. Zeit. 241 (2002), 613-637.
- [C-K-O 03] F.Catanese-J.H.Keum-K.Oguiso. Some remarks on the universal cover of an open  $K3$  surface. Math. Ann. 325 (2003), 279-286.
- [C-G71] J.Cheeger- Gromoll. The Splitting Theorem For Manifolds of Nonnegative Ricci Curvature. J.Diff. Geom. 6 (1971), 119-128.
- [D-K00] J.P. Demailly-J. Kollàr. Semi-Continuity of Complex Singularity Exponents and Kähler-Einstein Metrics On Fano Orbifolds. arXiv.math. AG/9910118.
- [F83] A. Fujiki. On Primitively Symplectic Compact Kähler V-Manifolds of Dimension Four. In: Classification of Algebraic and Analytic Manifolds. K. Ueno Ed. Progress in Math. 39 (1983), 71-250. Birkhäuser Verlag.
- [F-K-L] A.Fujiki-R.Kobayashi-S.Lu. On the Fundamental Group of Certain Open Normal Surfaces. Saitama Math. J. 11 (1993), 15-20.
- [K-Z00] J.Keum-D.Q.Zhang. Algebraic Surfaces with Quotient Singularities. To appear in Proc. Symp. Geom. in East Asia. Aug. 2000.
- [K-Z02] J. Keum and D. -Q. Zhang, Fundamental groups of open  $K3$  surfaces, Enriques surfaces and Fano 3-folds, Journal of Pure and Applied Algebra, 170 (2002), 67 – 91.
- [Li55] A. Lichnerowicz. Théorie globale des connexions et des groupes d'holonomie (1955) Edizione Cremonese. Monografie matematiche 2. (Consiglio nazionale delle Ricerche)
- [Mo-Mu82] S. Mori-S. Mukai. Uniruledness of the Moduli Space of Curves of Genus 11. LNM 1016 (1982), 334-353.
- [P97] T.Peternell. Minimal Varieties with Trivial Canonical Classes, I. Math. Zeit. 217 (1997), 377-405.
- [S-Z01] I. Shimada and D. -Q. Zhang, Classification of extremal elliptic  $K3$  surfaces and fundamental groups of open  $K3$  surfaces, Nagoya Mathematical Journal, 161 (2001), 23–54. (Japan).
- [Siu 87] Y.T.Siu. Kähler-Einstein Metrics. DMV Seminar 8. Birkhäuser (1987).
- [Y 78] S.T.Yau. On the Ricci Curvature of Compact Kähler Manifolds and the Complex Monge-Ampère Equation. Comm. Pure and Applied Math. 31 (1978), 339-411.

F.Campana

Département de Mathématiques.

Université Nancy 1.

BP 239

F. 54506. Vandoeuvre-Les-Nancy. Cédex.

e-mail: [campana@iecn.u-nancy.fr](mailto:campana@iecn.u-nancy.fr)